FachschaftsInitiative Physik HU Berlin

Brückenkurs WiSe 15-16

Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme

Julien Kluge

30. Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist eine Matrix?

1.1 Begriff und Notation

Eine Matrix (Mehrzahl Matrizen) ist ein sogenannter Tensor zweiter Stufe. Wir kennen bereits einen Tensor nullter Stufe, das ist eine gewöhnliche Zahl, auch Skalar genannt. Ein Tensor erster Stufe kennen wir als Vektor.
Man kann eine Matrix als rechteckige Anordnung von Zahlen beschreiben. Einige Beispiele wären:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \pi \\ \lambda & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1.5 & f(x) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & \chi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ 42 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 16 \\ 32 & 64 \end{vmatrix}$$

Uns fällt sofort auf, dass auch ein Vektor eine Matrix sein kann genauso wie ein Vektor mit einem Eintrag auch ein Skalar sein kann.
Variablen die eine Matrix halten, haben oft eine unterschiedliche Notation (Schreibweise). Allerdings werden sie immer als Großbuchstaben dargestellt. Weitere gängige Notationen sind: $A = \boldsymbol{A} = \underline{A} = \mathbb{A} = \overleftrightarrow{\mathrm{A}}$.

1.2 Dimension, Einträge und Definition

Die Dimension einer Matrix wird angegeben mit $n \times m$ wobei $n, m \in \mathbb{N}$. Sollten alle Einträge einer Matrix reelle Zahlen sein, wird auch oft geschrieben $\mathbb{R}^{n \times m}$ (das gilt natürlich analog auch für andere Zahlenbereiche).
Möchte man auf ein bestimmtes Element einer Matrix hinweisen gilt die folgende Notation für das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte: a_{ij}. Um Verwirrungen zu vermeiden, kann auch ein Komma/Semikolon zwischen i und j gesetzt werden also: $a_{i,j}$ oder $a_{i;j}$.
Um sich gut zu merken ob zuerst die Zeilen oder Spalten definiert werden gilt folgende *Eselsbrücke*:

***Z**eilen **z**uerst, **S**palten **s**päter.*

Mithilfe dieser Notation lässt sich eine implizite Matrix angeben: $(a_{ij})_{i=1,\ldots,n;=1,\ldots,m}$ welche äquivalent ist zu $\mathbb{R}^{n \times m}$. Beispiel:

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Der Vorteil dieser Notation ist, dass sich Werte über eine Formel mit den Indizes als Parameter festlegen lassen. Ein Beispiel wäre folgendes:
Sei die Matrix $\mathbb{M}$ definiert über $(m_{ij})_{i=1,2,3;=1,2,3}$ mit $m_{ij} = (i+1) \cdot j$. Es gilt also:

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+1)\cdot 1 & (1+1)\cdot 2 & (1+1)\cdot 3 \\ (2+1)\cdot 1 & (2+1)\cdot 2 & (2+1)\cdot 3 \\ (3+1)\cdot 1 & (3+1)\cdot 2 & (3+1)\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Man beachte den Unterschied, dass a_{ij} ein Eintrag einer Matrix ist, während (a_{ij}) eine ganze Matrix definiert.
Gilt bei einer Matrix $i = j$, also Zeilenanzahl gleich Spaltenanzahl, nennt man diese Matrix quadratisch.

2 Rechenregeln

2.1 Grundrechenarten

2.1.1 Addition/Subtraktion

Matrizen können nur mit anderen Matrizen gleicher Dimension addiert/subtrahiert werden. D.h. die Zeilen und Spaltenanzahl der beiden muss gleich groß sein. Ist das nicht der Fall, sind die Matrizen nicht addierbar/subtrahierbar. Die Addition von Matrizen ist vollständig kommutativ. Es gilt:

$$(a_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m} \pm (b_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1m} \pm b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & \dots & a_{nm} \pm b_{nm} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+(-2) \\ (-1)+1 & 0+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Skalare Multiplikation

Multipliziert man ein Skalar λ (Tensor nullter Stufe) mit einer Matrix (Tensor zweiter Stufe) kann diese Multiplikation elementweise vorgenommen werden. Es gilt:

$$\lambda \cdot (a_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m} = (\lambda \cdot a_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$$
$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{n1} & \dots & \lambda \cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Vektor-/Matrixmultiplikation

Matrizen mit anderen Matrizen oder Vektoren zu multiplizieren ist leider ein bisschen aufwändiger. Ohne größere Herleitung oder Erklärung führen wir die Matrixmultiplikation folgendermaßen ein:

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n} \qquad \mathbb{B} = (b_{kl})_{k=1,\dots,n;l=1,\dots,o}$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$$
$$(c_{pq})_{p=1,\dots,m;q=1,\dots,o} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n} \cdot (b_{kl})_{k=1,\dots,n;l=1,\dots,o}$$
$$c_{pq} = \sum_{h=1}^{n} a_{ph} \cdot b_{hq}$$

Es fallen sofort zwei Dinge auf. Erstens erhält die Ergebnismatrix die Zeilenanzahl der linken und Spaltenanzahl der rechten Matrix. Des Weiteren muss nach dieser Definition

die Spaltenanzahl der linken Matrix gleich der Zeilenanzahl der rechten Matrix sein. Dieses Kriterium **muss** gegeben sein, wenn man zwei Matrizen miteinander multipliziert.
Allerdings scheint diese Summendefinition, vor allem für große Matrizen, recht kompliziert. In diesem Fall hilft uns das sogenannte **Falk'sche Schema** weiter. Hier ordnet man die zu multiplizierenden Matrizen tabellarisch an. Jeder Matrixeintrag bekommt einen Eintrag in der Tabelle. Diese besteht aus der Ergebnismatrix (dessen Größe durch schnelle Betrachtung der zu multiplizierenden Matrizen bereits bekannt sein sollte) und den beiden Matrizen welche links daneben (die linke) und darüber (die rechte) positioniert werden. Wenn man nun einen Eintrag ausrechnen will, sieht man sich an, welche Zeilen er in der linken und welche Spalten er in der oberen Matrix durchstreicht. Diese rechnet man nun zusammen wie ein Skalarprodukt (man kann diese ruhig als Vektoren betrachten, dazu gleich mehr).

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 0 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}(-2)\cdot 1+(-1)\cdot 0 & (-2)\cdot 3+(-1)\cdot(-1) & (-2)\cdot 3+(-1)\cdot(-1)\\ 0\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 0\cdot 3+(-2)\cdot(-1) & 0\cdot 3+(-2)\cdot(-1)\\ 1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 3+2\cdot(-1) & 1\cdot 3+2\cdot(-1)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-2 & -5 & -5\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Das wird mit dem Falk'schen Schema zu:

		1	3	3
		0	-1	-1
-2	-1	$(-2)\cdot 1+(-1)\cdot 0$	$(-2)\cdot 3+(-1)\cdot(-1)$	$(-2)\cdot 3+(-1)\cdot(-1)$
0	-2	$0\cdot 1+(-2)\cdot 0$	$0\cdot 3+(-2)\cdot(-1)$	$0\cdot 3+(-2)\cdot(-1)$
1	2	$1\cdot 1+2\cdot 0$	$1\cdot 3+2\cdot(-1)$	$1\cdot 3+2\cdot(-1)$

Es ergibt sich beim näheren Hinsehen, dass das nur eine Vielzahl von Skalarprodukten von Zeilen und Spaltenvektoren ist.

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e\\ g\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f\\ h\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e\\ g\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f\\ h\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

Welches Verfahren man letztendlich anwendet bleibt einem selbst überlassen. In diesem Fall führen alle Wege zum Ziel. Letztendlich bleibt noch eine wichtige Anmerkung:

Matrizenmultiplikationen sind im allgemeinen **nicht** kommutativ!

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\neq\mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$$

(Das bedeutet ebenfalls, dass es bei Matrizen nicht egal ist, ob man von links oder von rechts an eine Gleichung heran multipliziert.)

2.1.4 Division

Teile nie durch Matrizen!

Genauso wie Vektoren können Matrizen allgemein nicht einfach so geteilt werden. Allerdings ergibt sich die Notwendigkeit einer ähnlichen Operation, wenn man sich folgende Gleichung anschaut:

$$\mathbb{A}\vec{b} = \vec{c}$$

Wenn man nun nach $\vec{b}$ auflösen möchte stößt man auf ein Problem: Wie bekommen wir die Matrix auf die andere Seite der Gleichung?
Dafür bedarf es zweierlei Dinge:

1. **Einheitsmatrix**
   Da Dividieren keine Option ist, müssen wir die Multiplikation missbrauchen. Die Idee wäre es, beide Seiten der Gleichung mit einer Matrix zu multiplizieren, welche eine Ergebnismatrix auf der linken Seite erzeugt, die multipliziert mit dem $\vec{b}$ Vektor wieder den Vektor $\vec{b}$ erzeugt. Eine Ergebnismatrix die das kann, nennt sich *Einheitsmatrix*. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$E_n = \mathbb{1} = I = (\delta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$$
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

   (Das δ_{ij} nennt man auch *Kronecker-Delta*)
   Aus der impliziten Notation geht gleich hervor, dass die Einheitsmatrix nur quadratisch sein kann. Für $n = 3$ sieht die Matrix demnach so aus:

$$E_3 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Die Einheitsmatrix entspricht auch genau unseren Vorstellungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c \\ 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
$$\implies \mathbb{1}\vec{v} = \vec{v}$$

2. **Inverse Matrix**
   Schritt Zwei wäre es nun, eine Matrix zu finden, welche multipliziert mit $\mathbb{A}$ die Einheitsmatrix ergibt. Diese nennt man inverse Matrix zu $\mathbb{A}$ und wird mit einem hochgestellten -1 geschrieben: $\mathbb{A}^{-1}$. Es gilt:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{1}$$

   Wie diese bestimmt wird, ist erstmal nicht Gegenstand dieses Scripts. Es reicht zu wissen, dass sie existiert und wie man mit ihr rechnet.

Wir können nun also die Lösung unserer Gleichung finden (Man beachte auf welche Seite man die Matrix ran multipliziert!):

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \cdot \vec{b} &= \vec{c} & &|\mathbb{A}^{-1} \cdot \\ \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{b} &= \mathbb{A}^{-1} \cdot \vec{c} \\ \mathbb{1} \cdot \vec{b} &= \mathbb{A}^{-1} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} &= \mathbb{A}^{-1} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

2.2 Transponieren

Wir haben jetzt alles was wir brauchen um mit Matrizen zu rechnen oder nicht? Werfen wir einen Blick auf die Multiplikation zweier Vektoren. Wie wir wissen, entsteht ein Skalar aus der Addition aller Beiträge elementweise zusammen multipliziert. Doch wenn wir nun mit unserer Vorschrift für die Matrizenmultiplikation vorgehen wollen, merken wir schnell, dass Vektoren nach dieser Definition nicht multiplizierbar sind, da die Spaltenzahl des Ersten nicht mit der Zeilenzahl des Zweiten übereinstimmt.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \text{n.d.}$$

Wenn wir uns aber nun vorstellen, dass wir den ersten Vektor um 90° gegen den Uhrzeigersinn kippen, funktioniert die Multiplikation plötzlich und es entsteht unser erwartetes Skalarprodukt.

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$$

Der Prozess dieses *Kippens* nennt sich Transponieren und wird mit einem hochgestellten T symbolisiert. Dies geschieht, in dem die Matrix über ihre Hauptdiagonale gespiegelt wird.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \implies \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \implies \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man sich vorstellen, dass Zeilen zu Spalten werden oder umgekehrt.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b & e & h \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & f & i \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3 Determinante

Determinanten wandeln eine **quadratische** Matrix in ein Skalar um. Über diesen Wert kann man dann einige Aussagen treffen. Will man mithilfe einer Matrix beispielsweise ein lineares Gleichungssystem lösen (siehe fünftes Kapitel), muss die Determinante ungleich null sein. Ist die Determinante null, ist das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar. Das Gleiche gilt für das Inverse einer Matrix. Hat die Matrix eine Determinante gleich null,

existiert keine eindeutig bestimmbare inverse Matrix.
Des Weiteren sagt die Determinante auch geometrisch etwas aus. Bei einer $\mathbb{R}^{3\times3}$-Matrix, bildet die Determinante eine Art Volumenverzerrungsfaktor. Transformiert diese Matrix nun einen drei dimensionalen Körper bestehend aus n Vektoren und sei die Determinante in diesem Fall zwei, dann sagt dies aus, dass der transformierte Körper das zweifache Volumen haben wird.
Die Notation dafür ist entweder det(...) oder bei expliziter Matrixangabe zwei gerade Striche.

3.1 2 × 2-Matrizen

Für 2 × 2-Matrizen ist die Bestimmung der Determinante recht leicht. Denn hier ist es nichts Anderes als das Produkt der Hauptdiagonalen (die Diagonale von links oben nach rechts unten) minus dem Produkt der Nebendiagonalen (die Diagonale von rechts oben nach links unten).

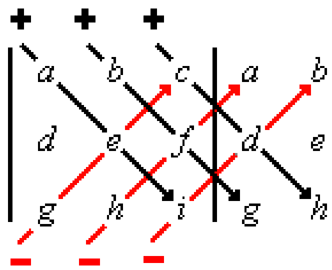
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \cdot d) - (b \cdot c)$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = (2 \cdot (-1)) - (1 \cdot (-4)) = (-2) - (-4) = 2$$

3.2 3 × 3-Matrizen - Regel von Sarrus

Zum Bestimmen der Determinante von 3×3-Matrizen benutzt man normalerweise die *Regel von Sarrus* (gesprochen: Regel von Sarüh). Diese funktioniert nur bei 3 × 3-Matrizen. Als erstes wird die Matrix nach rechts wiederholend erweitert. Nun nimmt man das Produkt der Hauptdiagonalen minus das Produkt der Nebendiagonalen. Danach rutscht man einen Eintrag nach rechts und wiederholt das Ganze. Insgesamt macht man das drei mal. Der entstehende Term ist die Lösung der Determinante.



$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (a \cdot e \cdot i) - (c \cdot e \cdot g) + (b \cdot f \cdot g) - (a \cdot f \cdot h) + (c \cdot d \cdot h) - (b \cdot d \cdot i)$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = ((-1) \cdot 3 \cdot (-3)) - ((-1) \cdot 3 \cdot 0) + (1 \cdot 0 \cdot 0) - ((-1) \cdot 0 \cdot (-1))$$
$$+ ((-1) \cdot (-2) \cdot (-1)) - (1 \cdot (-2) \cdot (-3)) = 9 - 0 + 0 - 0 - 2 - 6 = 1$$

3.3 4×4-Matrizen und größer

Für Matrizen die größer als 3×3 sind, kann der Laplace'sche Entwicklungssatz die Determinante finden. Dieser ist aber nicht Teil dieses Scripts. Es empfiehlt sich weiter führende Literaur. (`http://www.mathebibel.de/laplace-entwicklungssatz`)

4 Alle Rechengesetze in der Übersicht

Folgende Relationen gelten für allgemeine reelle Matrizen $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$.

- **Standartgesetze**

$$\begin{aligned}
(a_{ij})_{i,j} \pm (b_{ij})_{i,j} &= (a_{ij} \pm b_{ij})_{i,j} \\
\lambda \cdot (a_{ij})_{i,j} &= (\lambda \cdot a_{ij})_{i,j} \\
(c_{pq})_{p=1,\ldots,m;q=1,\ldots,o} &= (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n} \cdot (b_{kl})_{k=1,\ldots,n;l=1,\ldots,o} \;\Rightarrow\; c_{pq} = \sum_{h=1}^{n} a_{ph} \cdot b_{hq}
\end{aligned}$$

- **Rechengesetze**

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} + \mathbb{B} &= \mathbb{B} + \mathbb{A} \\
\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} &\neq \mathbb{B} \cdot \mathbb{A} \\
(\mathbb{A} + \mathbb{B}) \cdot \mathbb{C} &= \mathbb{A} \cdot \mathbb{C} + \mathbb{B} \cdot \mathbb{C} \\
\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \cdot \mathbb{C}) &= (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \cdot \mathbb{C} \\
\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} &= \mathbb{1} \\
(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^{-1} &= \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A}^{-1} \\
\mathbb{1} \cdot \vec{a} &= \vec{a} \\
\mathbb{1} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{1} &= \mathbb{A} \\
(\mathbb{A} + \mathbb{B})^T &= \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T \\
(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^T &= \mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}^T \\
\left(\mathbb{A}^T\right)^T &= \mathbb{A} \\
\det(\mathbb{A} \pm \mathbb{B}) &\neq \det(\mathbb{A}) \pm \det(\mathbb{B}) \\
\det(\lambda \cdot \mathbb{A}) &= \lambda^n \cdot \det(\mathbb{A}) \text{ mit } \mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\
\det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) &= \det(\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}) \\
\det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) &= \det(\mathbb{A}) \cdot \det(\mathbb{B}) \\
\det\left(\mathbb{A}^T\right) &= \det(\mathbb{A})
\end{aligned}$$

- **Potenzgesetze**

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^\lambda &= \prod^{\lambda} \mathbb{A} \\
\mathbb{A}^0 &= \mathbb{1} \\
\mathbb{A}^{-\lambda} &= \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^\lambda = \left(\mathbb{A}^\lambda\right)^{-1} \\
\mathbb{A}^{\lambda+\mu} &= \mathbb{A}^\lambda \cdot \mathbb{A}^\mu
\end{aligned}$$

5 Gauß-Algorithmus

Wie bereits im Script erwähnt, lassen sich Matrizen ebenfalls einsetzen um lineare Gleichungssysteme zu lösen. Diese Methode nennt sich Gauß-Algorithmus oder in einer leicht anderen Variante Gauß-Jordan-Algorithmus. Mit diesem lassen sich außerdem inverse Matrizen bestimmen.
Man nehme nun folgendes Gleichungssystem an:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Als erstes trägt man nun die Koeffizienten des LGS in eine Matrix ein, wobei man einen Strich zwischen eigentlichen Koeffizienten und rechter Seite des LGS zieht. Dabei muss darauf geachtet werden, dass die Koeffizienten mit gleicher Variable in eine Spalte geschrieben werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Ziel des Algorithmus ist es nun, unter der Hauptdiagonalen nullen zu erzeugen (warum sehen wir später). Dabei sind folgende Umformungen erlaubt:

- vertauschen der Zeilen untereinander
- Multiplizieren/Dividieren einer Zahl mit einer Zeile
- eine Zeile mit einer anderen Addieren/Subtrahieren

Also führen wir beispielhaft aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \xRightarrow{III-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xRightarrow{I\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xRightarrow{II+I} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{array}\right) \xRightarrow{III+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

Warum ist diese Darstellung jetzt nun sinnvoll? Das ergibt sich, wenn man es zurück in ein Gleichungssystem umschreibt:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Nun kann man leicht die Ergebnisse aus diesen Gleichungen errechnen.

$$x_3 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1, x_1 = 2$$

Aber selbst diese Rechnung lässt sich weiter mit den Matrizen betreiben. Dieser weiterführende Algorithmus heißt Gauß-Jordan Algorithmus und besteht darin erst über der Hauptdiagonalen ebenfalls nullen zu erzeugen um dann in der Hauptmatrix (ohne die rechte Koeffizientenspalte) eine Einheitsmatrix zu erzeugen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{III\cdot(-\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{II+III} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{III\cdot(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{I+III} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{II\cdot(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{I+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Entweder man überträgt hier schon das LGS und macht dann die Divisionen per Hand oder man macht sie weiter in Matrixform.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{III\cdot(-\frac{1}{4})} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{II\cdot\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{I\cdot\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Rückübertragung ins LGS liefert sofort die Ergebnisse:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Das stimmt mit den von oben erlangten Ergebnissen überein. Im echten Einsatz empfiehlt es sich, mehrere Operationen auf einmal zu machen um Schreibarbeit zu sparen. Sollte

beim Umformen eine komplette Nullzeile entstehen, ist dieses LGS überbestimmt und eine Variable darf frei gewählt werden. Sollte eine Zeile entstehen, in der die Koeffizienten alle null sind, die rechte Seite aber ungleich null ist, hat das LGS keine Lösung.
Mithilfe des Gauß-Jordan Algorithmus können auch andere Gleichungen gelöst werden. Bei gegebener Matrix $\mathbb{A}$ und Vektor $\vec{v}$ lässt sich der Vektor $\vec{x}$ finden, der folgende Gleichung löst:

$$\mathbb{A} \cdot \vec{x} = \vec{v}$$

Ebenfalls findet der Algorithmus eine Lösung für $\mathbb{A}^{-1}$ für folgende Gleichung:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{1}$$

Somit ist uns ein Werkzeug an die Hand gegeben, mithilfe dessen wir Inverse bestimmen können.
Beispiel: Sei $\mathbb{A}$ gegeben und $\mathbb{A}^{-1}$ gesucht für die Lösung der Gleichung $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{1}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Im Gauß-Jordan Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{II-2\cdot I} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{I+2\cdot II} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{I\cdot(-1);\, II\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Unsere Inverse steht auf der rechten Seite.

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir überprüfen durch Rechnung:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 + 2 \cdot 2 & (-1)\cdot(-2) + 2\cdot(-1) \\ (-2)\cdot 3 + 3\cdot 2 & (-2)\cdot(-2) + 3\cdot(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \end{aligned}$$